جامعة البعث
كلية العلوم



قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

بنى جبرية (1)

المحاضرة العملية الأولى

(١)

إعداد :

داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

أولاً : مبادئ أساسية في نظرية المجموعات :

نذكر بداية التكوينة الفطرية لاصطلاح "المجموعة"
و التي تبدأ مع تنامي فطرة الإنسان الأولى ---
* فمثلاً عندما نعطي الطفل مجموعة من العناصر
المتشابهة مع بعضها في الشكل أو اللون أو الوظيفة
أو ---- و يستطيع أن يدرك كيفية التمييز بينها
على سبيل المثال : عندما نعطيه العناصر التالية :
(طاولة - كرسي - وردة - كتاب - شجرة)
و نقول له اختر من هذه العناصر ما هو جماد ،
فيقول : طاولة - كرسي - كتاب
ونقول له اختر من هذه العناصر ما هو نبات ،
فيقول : وردة - شجرة
و نشرح للطفل حينها أن ما فعلناه هو انشاء مجموعة
العناصر النباتية و مجموعة العناصر الجامدة .
و انطلاقاً من هذه الفطرة البدائية وصولاً إلى
الكثير من التطبيقات الحياتية و الكونية التي تبرز
فيها مدى أهمية هذا الإصطلاح ، سندرس بعض مبادئ نظرية
المجموعات . ففي الرياضيات --- اصطلاح المجموعة سمح لنا
بتصنيف أنواع الأعداد ، لنفهم ماهية الإختلاف
الجبري بين العدد الحقيقي و الصحيح و العادي و ←

وَ الغيرعادي وَ الطبيعي وَ العقدي ...

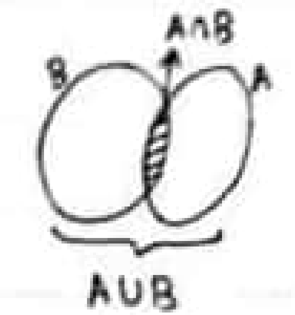
كيف يمكن أن نصيغ تعريفاً للمجموعة؟
المجموعة هي جملة من الأشياء (عدد من العناصر محدود أو غير محدود) وَ تشترك فيما بينها بخاصة معينة أو تجمعها صفة معينة ....

* تتعين المجموعة بمعرفة ماهية الأشياء التي تتكون منها هذه المجموعة. وبذكر الصفات المشتركة لهذه الأشياء.
* نرمز للمجموعة بحروف كبيرة $A, B, C, \ldots$
* نرمز لعناصر المجموعة بأحرف صغيرة $a, b, c, \ldots$
* إذا أردنا أن نعبر عن أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A نكتب $a \in A$.
* إذا أردنا أن نعبر عن أن المجموعة A تضم المجموعة B نكتب $B \subset A$.

العمليات على المجموعات : لتكن A وَ B مجموعتين :

١- الإجتماع : اجتماع المجموعتين A وَ B هو :
$$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
(أو)

2- التقاطع : تقاطع المجموعة A مع B هو :
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$



* إنَّ $A \subseteq A \cup B$
* إنَّ $B \subseteq A \cup B$

---

* إذا كانَ $B \subseteq A$ فإنَّ $A \cup B = A$
أيْ أنَّهُ إذا كانت المجموعة B موجودة في المجموعة A نجدها سيكون اجتماع المجموعتين A و B سيعطينا المجموعة الكليّة A .

---

* إذا كانَ هناك تقاطع بين المجموعتين A و B فإنَّ $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$
لاحظ الرسمة في أعلى هذه الصفحة، إنَّ المنطقة المظللة تمثل تقاطع المجموعتين A و B ، وهذه المنطقة موجودة في A و B معاً.

---

* إذا كانت المجموعة A تضم المجموعة B فإنَّ تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة B .

$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$

3- الفرق : فرق المجموعة A عن المجموعة B هو كل عنصر ينتمي إلى A ولا ينتمي إلى B .

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$

نخب من مكتبة مبارز الهندسية — أرضي: ٠٣١٢١١١٨١١٩



حمص – نفق جامعة البعث — جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

ثانياً: الجداء الديكارتي لمجموعتين:

الجداء الديكارتي بين المجموعتين A و B هو المجموعة المكونة من الثنائيات من الشكل (a,b) حيث a عنصر من عناصر A و b عنصر من عناصر B.

$$A\times B=\{(a,b)\ ;\ a\in A\ ,\ b\in B\}$$

العلاقة بين مجموعتين: نعرف العلاقة ρ (رو) بين المجموعة A و المجموعة B بأنها مجموعة جزئية من مجموعة الجداء الديكارتي: $A\times B$

أي $\rho\subseteq A\times B$ ، و نقرأ العبارة $(a\rho b)$ بالشكل: b يرتبط بـ a و يكون ذلك محققاً إذا كان

$$(a,b)\in\rho\subseteq A\times B$$

مثال: لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة:

و لنعرف عليها العلاقة ρ بالشكل:

$$\rho=\{(a,b)\ ;\ b-a=1\}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

أي مجموعة الثنائيات التي تحقق:

ناتج طرح الإحداثية الثانية من الإحداثية الأولى يساوي الواحد الصحيح: أي:

$a\rho b$ {b يرتبط بـ a إذا كان $a-b=1$}.

إذن: عناصر العلاقة ρ هي:

$[(1,2), (2,3), (3,4), ..., (n,n+1), ...]$

أنواع العلاقة ρ:

1) العلاقة الإنعكاسية:

$\forall x \in P : x \rho x$

أي كل عنصر يرتبط بنفسه وفقاً ρ.

---

2) العلاقة التناظرية:

$\forall x, y \in P : x \rho y \Leftrightarrow y \rho x$

إذا ارتبط عنصر بآخر فالآخر يرتبط به.

---

3) العلاقة التخالفية:

$\forall x, y \in P : x \rho y$ و $y \rho x \Leftrightarrow x = y$

تكون العلاقة تخالفية إذا كانت العلاقة التناظرية «إن وجدت» بين أي عنصرين مشروطة بتساوي هذين العنصرين.

---

4) العلاقة المتعدية: «المرتبطان بثالث مرتبطان»

$\forall x, y, z \in P : x \rho y$ و $y \rho z \Leftrightarrow x \rho z$

ارتباط y بـ x و z بـ y يعني ارتباط x بـ z.

5) علاقة التكافؤ :

إذا كانت العلاقة ρ علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية نسميها علاقة تكافؤ.

* أشهر علاقة تكافؤ هي علاقة المساواة.

مثال : لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ، ولنعرف العلاقة ρ بالشكل :

$a \rho b$ إذا وفقط إذا كان $(a-b)$ يقبل القسمة على 5 . برهن أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

الحل :

1) يجب أن تكون انعكاسية ، أي كل عنصر مرتبط بنفسه ، أي مهما كان العدد الصحيح a فإن ناتج الطرح $a-a$ يجب أن يقبل القسمة على خمسة وذلك محقق لأنه دوماً $0 \div 5 = 0$ بلا باقٍ .

$\forall a \in \mathbb{Z} \; ; \; a - a = 0 \Rightarrow$ يقبل القسمة على 5

إذاً العلاقة انعكاسية.

2) يجب أن تكون العلاقة تناظرية ، أي إذا ارتبط عنصر بآخر فالآخر سيرتبط به .

أي إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على 5 فإن $b-a$ سيقبل القسمة على 5 . وذلك محقق .

مثلاً : $(5-10)$ يقبل القسمة على 5 وكذلك $(10-5)$.

3) يجب أن تكون العلاقة متعدية ، أي إذا ارتبط b بـ a و b بـ c فسيرتبط c بـ a .
أي إذا كان a-b يقبل القسمة على 5
وكان b-c يقبل القسمة على 5 فإن a-c يقبل القسمة على 5 . أي :
باقي $(a-b) - (b-c) = (a-c) \rightarrow$
قسمته على 5 يساوي صفر .
و ذلك دائماً محقق . فمثلاً :
$(\overset{a}{10} - \overset{b}{25}) = -15$ ← يقبل القسمة على 5
$(\overset{b}{25} - \overset{c}{40}) = -15$ ← يقبل القسمة على 5
فإن : $(10-40) = -30$ ← يقبل القسمة على 5
إذا العلاقة متعدية .
الشروط الثلاث محققة إذا العلاقة هي علاقة تكافؤ (انعكاسية - تناظرية - متعدية)

صف التكافؤ : $\bar{a} = [\, x : a \rho x \,]$
المجموعة التي كل عنصر من عناصرها يرتبط بـ a تمثل صف التكافؤ $\bar{a}$.
مثال : أوجد صفوف التكافؤ في المثال السابق .
أبدأ من الصفر 0 و أبحث عن العناصر التي ترتبط مع الصفر وفق العلاقة ρ ←

حيث كما قلنا في المثال السابق العلاقة R بين عنصرين a و b هي أن يقبل (a-b) القسمة على 5.

$\bar{0} = [----, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ---]$

نلاحظ أن كل عنصر من هذه العناصر يرتبط مع المثل 0.

$\bar{1} = [---, -9, -4, 6, 11, ----]$

$\bar{2} = [---, -8, -3, 7, 12, ---]$

$\bar{3} = [---, -7, -2, 8, 13, ---]$

$\bar{4} = [---, -6, -1, 9, 14, ---]$

$\bar{5} = [---, -15, -10, -5, 0, 5, 10, ---]$

نلاحظ أن $\bar{0} = \bar{5}$

و لو أكملنا سيكون: $\bar{1} = \bar{6}$, $\bar{2} = \bar{7}$

و $\bar{3} = \bar{8}$ و $\bar{4} = \bar{9}$ و ----

* أرمز لمجموعة صفوف التكافؤ هنا:

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}]$

و إن عناصر هذه المجموعة تشكل تجزئة لـ المجموعة $\mathbb{Z}$

- مفهوم علاقة الترتيب الجزئي :
إذا كانت العلاقة ρ انعكاسية و متعدية و تخالفية نسميها علاقة ترتيب جزئي .
- مفهوم علاقة الترتيب الكلي :
هي علاقة ترتيب جزئي و لكن يكون بالإضافة لذلك جميع عناصر المجموعة P المعرف عليها العلاقة ρ تكون متقارنة مثنى مثنى .

تعريف : $\mathbb{Z}_n = [0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$
مثلاً : $\mathbb{Z}_5 = [0, 1, 2, 3, 4]$
نعرف عملية الجمع على هذه المجموعة بالشكل :
$a \oplus b$ هو باقي عملية القسمة $\frac{a+b}{n}$.
مثلاً : $4 \oplus 2 = 6 \bmod 5 = 1$

---

* مفهوم الصورة المباشرة - المثال المحلول - صفي المحاضرة القادمة .

انتهت المحاضرة العملية الأولى

إعداد : داني ممدوح - وهب الحسن